ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1.1

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН.

1. Цель работы: изучение теории погрешности и ее применение для обработки результатов измерений физических величин.

2. Условные обозначения:

l, d, h – длина, ширина и высота параллелепипеда, мм;

$\langle d \rangle$ - среднее значение результата серии измерений, мм;

Δd_i - погрешность i-го измерения, мм;

Δd – величина абсолютной погрешности (граница доверительного интервала);

θ - погрешность прибора;

δ - относительная погрешность;

n – число измерений.

3. Теоретические сведения.

Характеристики процессов или свойств тел, которые могут быть определены количественно с помощью измерений, называются физическими величинами.

Основная задача физического опыта – определение численных значений физических величин и установление количественных зависимостей между ними. Процесс выполнения опыта складывается из осуществления измерений и их математической обработки.

Измерением называется процесс сравнения измеряемой величины с ее значением, принятым за единицу.

Различают два вида экспериментальных измерений – прямые и косвенные. При прямом измерении численное значение измеряемой величины получают либо прямым сравнением с ее мерой, либо с помощью приборов, градуированных в единицах измеряемой величины.

При косвенном измерении определяемая величина вычисляется по формуле, включающей результаты прямых измерений.

Вследствие ограниченной точности измерительных приборов, неполноты наших знаний, трудности устранения второстепенных явлений в результатах измерений возникают ошибки. Поэтому в ходе измерений получается не точное значение измеряемых величин, а значения, содержащие ту или иную, неизвестную нам погрешность. Основываясь на теории ошибок, оказывается возможным установить предельное значение ошибки, т.е. определить интервал, в котором вероятнее всего находится истинное значение измеряемой величины.

С учетом причин, порождающих ошибки, различают систематические, случайные и приборные ошибки. При такой классификации не учитываются грубые ошибки (промахи), вызванные невниманием при снятии показаний приборов, неправильной записью измеряемых данных, ошибками при вычислениях и т.п. Такие ошибки не подчиняются какому-либо закону и устраняются при промежуточной оценке результатов измерений. На грубую ошибку в отдельном измерении указывает резкое отличие его результата от результатов, полученных при последующих или предыдущих измерениях. Такое измерение следует отбросить и повторить измерение еще.

Систематические ошибки обусловливаются факторами, действующими одинаково при многократном повторении измерений. Возникают они чаще всего при неисправности измерительных приборов, неточности метода измерений и при использовании для расчетов неточных данных.

Систематическая погрешность всегда смещает результат измерений в одну и ту же сторону, часто – на одну и ту же величину.

Систематические погрешности можно устранить, либо учитывая их в виде поправок к показаниям приборов (считать деление, на котором стоит стрелка амперметра при отсутствии тока, нулевым, каждый раз вычитая его из показаний прибора) либо, проверив приборы по эталонным.

Случайные погрешности вызываются причинами, действующими неодинаковым, непредсказуемым образом в каждом отдельном измерении. Они возникают при совокупном действии многих факторов и остаются при устранении грубых и систематических ошибок. Существуют многочисленные объективные и субъективные причины случайных ошибок: изменение напряжения в сети при электрических измерениях, неоднородность вещества при определении плотности, изменение температуры, давления и т.д. Подобные причины приводят к тому, что несколько измерений одной и той же величины дают различные результаты. К случайным ошибкам, кроме того, следует отнести все те ошибки, причины которых неизвестны или неясны.

Вследствие непредсказуемых обстоятельств случайные ошибки могут как увеличивать, так и уменьшать значение измеряемой величины. Случайные ошибки не устраняются – их нельзя избежать в каждом из результатов измерений.

Случайные погрешности подчиняются законам теории вероятностей, установленным для случайных явлений. С помощью методов теории вероятностей можно уменьшить влияние случайных ошибок на результат эксперимента.

Теория случайных погрешностей позволяют определить наиболее вероятные значения измеряемых величин и возможные отклонения от них. Однако выводы теории вероятностей справедливы только для достаточно большого числа случайных событий, следовательно, выводы теории случайных ошибок и применение ее к расчетам правомерны, если измерения повторены большое число раз.

3.1. Погрешности прямых измерений

Наиболее вероятное значение измеряемой величины x равно среднему арифметическому $\langle x \rangle$ значений, полученных в результате измерений:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

где x_1, x_2, x_3,…,x_n – значения измеряемой величины; n – число измерений.

Абсолютное значение разности между средним арифметическим <x> и каждым из отдельных результатов измерений называется абсолютной ошибкой отдельного измерения:

$$\Delta x_i = |\langle x \rangle - x_i| \qquad (2)$$

При достаточно большом числе измерений случайные погрешности с равной вероятностью будут отклоняться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения измеряемой величины, т.е. можно считать, что точное значение измеряемой величины заключено в интервале $\langle x \rangle - \Delta x \le x \le \langle x \rangle + \Delta x$, называемом доверительным интервалом. Это неравенство принято записывать в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \qquad (3)$$

Вероятность найти измеряемую величину в этом интервале называют доверительной вероятностью, или надёжностью Р.

При обработке результатов лабораторных работ доверительную вероятность принимают равной 90%, или Р=0,90. Число измерений при этом равно 5÷10. Это вносит дополнительную неопределенность в результат измерений и поэтому границы доверительного интервала нужно расширить. При этом вычисляется средняя квадратичная погрешность измерения по формуле:

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2} \qquad (4)$$

Затем вычисляют случайную погрешность измерений

$$(\Delta x)_{случ} = t \cdot S(x), \qquad (5)$$

где t - коэффициент Стьюдента.

Значения t для надёжности Р=0,90 и различного числа измерений приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения коэффициента Стьюдента

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,90	1,86	1,83

Для полной характеристики точности измерений вычисляют относительную погрешность, равную отношению средней абсолютной погрешности к среднему результату измерений по формуле:

$$\delta = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \qquad (6)$$

С увеличением числа измерений абсолютная Δx и средняя квадратичная S(x) погрешности уменьшаются. Следовательно, измерение надо выполнять столько раз, чтобы оно было равно погрешности прибора. Приборная погрешность θ обусловлена конструктивными особенностями приборов.

Для электроизмерительных стрелочных приборов указывают класс точности. Число, обозначающее класс точности (0,05; 0,1; 1,0; …4,0) представляет собой наибольшую погрешность прибора, выраженную в процентах от конечного значения величины. Так, если класс точности вольтметра 1,0, диапазон измерений которого 0 –30В, абсолютная погрешность в любой точке шкалы θ =

±0,3 В. Относительная погрешность зависит от величины измеряемого напряжения и при малых напряжениях может быть недопустимо высокой.

Например, U_1=5В; $\delta_1 = \frac{0,3}{5} \cdot 100\% = 6\%$;

U_2=0,5В; $\delta_2 = \frac{0,3}{0,5} \cdot 100\% = 60\%$

У стрелочных приборов цена деления согласована с погрешностью прибора. Это позволяет находить погрешность прибора, класс точности которого неизвестен: за приборную погрешность принимается половина цены деления шкалы. Это же правило применяется для оценки погрешности линеек и других приборов с нанесенной шкалой.

Таким же образом оценивается погрешность измерения, если оно выполнено только один раз.

Если необходимо учитывать как приборную погрешность θ, так и случайную абсолютную погрешность, то полная абсолютная погрешность среднего значения измеренной величины вычисляется по формуле:

$$\Delta x = \Delta x_{сл} + \theta = t \cdot S(x) + \theta \qquad (7)$$

Если одна из этих ошибок меньше другой в 4 и более раз, то ее в окончательном результате можно не учитывать.

Окончательный результат записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x, \qquad P=0,90; \qquad \delta = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%$$

3.2. Погрешности косвенных измерений

Доверительный интервал можно найти дифференцируюя функциональную зависимость величины A от результатов прямых измерений x, y, z:

$$dA = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz .$$

Заменив полные дифференциалы на абсолютные погрешности, находят абсолютную погрешность искомой величины по формуле:

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2} ,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ - частные производные функции,

Δx, Δy, Δz - аюсолютные погрешности прямых измерений, вычисленные по формуле (7).

Относительная погрешность вычисляется по формуле:

$$\delta_x = \frac{\Delta A}{\langle A \rangle} \cdot 100\% .$$

Пример. Объём цилиндра $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$.

$$\Delta V=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial h}\Delta h\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial d}\Delta d\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\pi\langle d\rangle^2}{4}\Delta h\right)^2+\left(\frac{\pi\langle h\rangle\langle d\rangle}{2}\Delta d\right)^2}=\frac{\pi\langle d\rangle^2}{4}\langle h\rangle\sqrt{\left(\frac{\Delta h}{\langle h\rangle}\right)^2+\left(\frac{2\Delta d}{\langle d\rangle}\right)^2}=$$

$$=\langle V\rangle\sqrt{\delta_h^2+4\delta_d^2},$$

$$\delta V=\frac{\Delta V}{\langle V\rangle}=\sqrt{\delta_h^2+4\delta_d^2};\qquad V=\langle V\rangle\pm\Delta V.$$

3.3. Приближенные вычисления.

Все числа, получаемые при измерениях, являются приближенными. В случае приближенных вычислений отличают запись 18,3 от 18,300. Запись18,3 означает, что верны лишь цифры целых и десятых долей, т.е. истинное значение числа может быть и 18,38 и 18,32. Запись 18,300 означает, что верны также сотые и тысячные доли, т.е. истинное значение может быть 18,2996 и 18,3002.

Значащими цифрами называются все верные цифры, кроме нулей, стоящих впереди числа. Например, в числе 0,0708 – три значащие цифры. Первые два нуля слева – незначащие, нуль между 7 и 8 – значащий. В числе 6100 – четыре значащих цифры. Запись $6{,}1\cdot 10^3$означает, что значащих цифр только две (6 и 1).

Точность измерений нельзя повысить математическими действиями над полученными результатами измерений. Учет большого числа значащих цифр без оценки их достоверности затрудняет вычисления и оказывается бесполезным. Поэтому целесообразно пользоваться следующими правилами округления приближенных чисел.

При округлении оставляют лишь верные знаки, остальные отбрасывают. При этом увеличивают последнюю из остающихся на единицу, если первая из отбрасываемых цифр больше 5, и оставляют последнюю из остающихся цифр неизменной, если первая из отбрасываемых меньше 5. Последняя увеличивается также и в том случае, когда первая из отбрасываемых цифр – 5, а за ней есть одна или несколько цифр, отличных от нуля. Например, различные округления числа 53,586 будут: 53,59; 53,6; 54.

Если отбрасываемая цифра равна 5, а за ней нет значащих цифр, то последняя сохраняемая цифра оставляется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная. Например, 2,235 округляем до 2,24; 1,385 округляем до 1,38.

При сложении и вычитании округление всех чисел производится до разряда, на единицу меньшего, чем разряд наименее точного числа. В окончательном результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в наименее точном числе, входящем в операцию:

$$32{,}2+0{,}344+9{,}257\approx 32{,}2+0{,}33+9{,}26=41{,}79\approx 41{,}8$$

При умножении и делении приближенных чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр:

$2{,}324\cdot 2{,}8\approx 2{,}3\cdot 2{,}8=6{,}44\approx 6{,}4$ $\qquad$ $41{,}8\cdot 2{,}324=41{,}8\cdot 2{,}3=96{,}14=96{,}1$

$3{,}9:2{,}354=3{,}9:2{,}4=1{,}625\approx 1{,}6$ $\qquad$ $96{,}1:2{,}554=96{,}1:2{,}6=36{,}96\approx 37$

При возведении в степень сохраняют в результате столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число:

$$\sqrt{2{,}58} = 1{,}6062378 \approx 1{,}61$$

Если соответствующая операция является промежуточной, то в ее результате берут на одну значащую цифру больше, чем указано в правилах, а в окончательном результате последнюю цифру отбрасывают с соблюдением правил округления.

$$\frac{(32{,}2 + 0{,}334 + 9{,}257)\cdot 2{,}324}{2{,}554} = \frac{(32{,}2 + 0{,}33 + 9{,}26)\cdot 2{,}3}{2{,}6} = 36{,}96 \approx 37$$

При обработке результатов измерений среднее значение, полная абсолютная погрешность и относительная погрешность округляются по следующим правилам:

a) вначале округляется абсолютная погрешность до двух значащих цифр, если первая из них 1, и до двух значащих цифр в остальных случаях;

b) округляется среднее значение до разряда, совпадающего с младшим разрядом абсолютной ошибки;

c) относительная погрешность записывается в процентах с точностью до двух значащих цифр.

Пример записи окончательного результата измерений при определении объема цилиндрического тела

Объем цилиндрического тела
V=(9,53±0,25)см^3=(9,5±0,3)см^3
δ=2,65%=2,6%

4. Порядок выполнения работы.

4.1. Внесите технические данные об используемых приборах в таблицу 2.

Таблица 2. Технические данные используемых приборов.

Прибор	пределы измерения	цена деления	класс точности	приборная погрешность
Штангенциркуль				

Измерьте длину l, ширину d, толщину h параллелепипеда. Все измерения повторите пять раз и результаты измерений внести в таблицу 3.

Таблица 3. Результаты измерений.

№ опыта	l	d	h	Δl_i	Δl_i^2	Δd_i	Δd_i^2	Δh_i	Δh_i^2
1 2 3 4 5									
среднее	$\langle l\rangle=$	$\langle d\rangle=$	$\langle h\rangle=$						

4.2. Вычислите среднее арифметическое $\langle l \rangle$ по формуле (1).

4.3. Вычислите абсолютные погрешности отдельного измерения Δl_i по формуле (2).

4.4. Вычислите абсолютную погрешность $\langle \Delta l \rangle$ по формуле (5).

4.5. Если случайная погрешность сравнима с величиной приборной погрешности, то абсолютную погрешность вычислите по формуле (7).

Округлите значения абсолютной погрешности Δl и среднего арифметического $\langle l \rangle$ и запишите окончательный результат в виде:

$$\tilde{l} = \langle l \rangle \pm \Delta l, \quad P=0,90.$$

4.6. Вычислите относительную погрешность:

$$\delta_l = \frac{\Delta l}{\langle l \rangle} \cdot 100\,\%$$

4.7. Аналогично проведите обработку результатов измерения ширины d и толщины h параллелепипеда. Данные расчетов внесите в таблицу 3.

4.8. Абсолютную погрешность косвенных измерений объема параллелепипеда ΔV определите по формуле:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\langle d \rangle \langle h \rangle \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\langle l \rangle \langle h \rangle \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\langle l \rangle \langle d \rangle \cdot \Delta h\right)^2} =$$

$$= \langle l \rangle \langle d \rangle \langle h \rangle \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{\langle l \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{\langle d \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2};$$

где $\langle l \rangle \langle d \rangle \langle h \rangle = \langle V \rangle$ - среднее арифметическое объема параллелепипеда.

4.10. Округлите значения величин ΔV и $\langle V \rangle$, результат запишите в виде:

$$V = \langle V \rangle \pm \Delta V, \qquad \delta_V = \frac{\Delta V}{\langle V \rangle} \cdot 100\,\%$$

Отчет должен содержать все таблицы, основные формулы, расчеты и выводы.

5. Контрольные вопросы:

1. Что называется измерением?
2. Что принимают в качестве истинного значения измеряемой величины?
3. Какие ошибки измерений различают с учетом причин, порождающих ошибки?
4. Каким образом можно устранить систематическую ошибку?
5. Какие факторы обусловливают случайные ошибки?
6. Как определяется наиболее вероятное значение измеряемой величины?
7. Дайте определение средней абсолютной погрешности.
8. Как определяется средняя квадратичная погрешность?
9. Что такое относительная погрешность?
10. Как определяются абсолютная и относительная погрешности для простейших косвенных измерений?
11. Назовите основные правила округления приближенных чисел.

12. Сформулируйте правила округления окончательного результата измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кортнев А.В., Рублёв Ю.В., Куценко А.Н. Практикум по физике. - М.: Высшая школа, 1965.
2. Авдусь З.И., Архангельский М.М., Кошкин Н.И., Шебалин О.Д., Яковлев В.Ф. Практикум по общей физике. - М.: Просвещение, 1971.
3. Лабораторные занятия по физике (под ред. Гольдина Л.Л.). - М.: Наука, 1983.
4. Евграфова Н.Н., Каган В.Л. Руководство к лабораторным работам по физике. - М.: Высшая школа, 1970.